Lista de Ejercicios — 2° año - Matemática CTS

Anthony de los Santos *

2025

*Los ejercicios y comentarios presentados aquí son de mi responsabilidad, por cualquier error visto contactar *agregdelossantos@gmail.com*

Contenido :

0 Sobre estas notas.

Estas notas estan pensadas para ser una guia en las clases, y también será referencia de ejercicios a realizar.

—

Estas notas, apuntes, estan en construcción. Se modifica en el correr del curso. **Ultima modificación : Domingo 22 de Junio**

—

1 Matrices

Dado los siguentes vectores (columna), realizar las operaciones que se indican, $a = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$ $b = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $c = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 6 \end{pmatrix}$

1. $a + b + c$
2. $5a$
3. $-3b + 2c$
4. $3a + 2b + 4c$

Operaciones básicas con Matrices

Dada las Matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -2 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -4 & 7 \\ 0 & 1 \\ 8 & -3 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 5 & -9 \\ 3 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$

1. Calcular las siguientes operaciones,
   (a) $A - C$
   (b) $2C - 5A$
   (c) $6B + 7A + 0C$
2. Encuentre una matriz D tal que $2A + B - D$ es la matriz cero de 3×2
3. Encuentre una matriz E tal que $A + 2B - 3C + E$ es la matriz cero de 3×2

2 Producto de Matrices

Para comenzar: Producto de matrices 2x2)

Dada las siguientes matrices, $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$
realizar el producto de AB, BA

- Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 0 & -4 \\ -3 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
  Realizar, en caso que corresponda, AB, BA

- Sea la Matriz $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, Calcular AI
  Esta ultima matriz I, tiene un papel particular en álgebra de matrices.

Cuadrado Latino *(Latin square)*

Definición : Un Cuadrado Latino, es una matriz de tamaõ $n \times n$ en donde cada fila y columna, contiene los n elementos distintos uno en cada vez.

Ejemplo de un cuadrado latino 3×3 : $L = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

- Crear un cuadrado latino de tamaño 5×5

Algunas pruebas

- Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 8 & -2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ Probar que $A^2+B^2 = (A+B)^2$

- Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ Determinar las condiciones de a, b, c, d para que $AB = BA$

3 Sistemas de ecuaciones lineales y Matrices

Escribir y resolver los siguientes sistemas de ecuaciones en su forma matricial.

$$a)\begin{cases}2x-3y=9\\4x+3y=9\end{cases}\qquad b)\begin{cases}2x+4y+6z=18\\4x+5y+6z=24\\3x+y-2z=4\end{cases}\qquad c)\begin{cases}2x+4y+6z=18\\4x+5y+6z=24\\2x+7y+12z=30\end{cases}$$

$$d)\begin{cases}2y+3z=4\\2x-6y+7z=15\\x-2y+5z=10\end{cases}\qquad e)\begin{cases}9y-7z=2\\-z=-2\\-3x+6y+8z=1\end{cases}$$

$$f)\begin{cases}x+w=5\\y+z=7\\x+z+w=0\\z-w=2\end{cases}$$

4 Determinantes

Matriz Inversa (caso 2x2) :

Determinar si las siguientes matrices son invertibles y hallar su inversa,

$$A=\begin{pmatrix}2&-4\\1&3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}3&-5\\2&3\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}2&-2\\-1&3\end{pmatrix}\quad D=\begin{pmatrix}1&2\\-2&-4\end{pmatrix}$$

Determinantes 2x2

Calcular el Determinante de las matrices 2x2 que se presentan en el ejercicio anterior, (las matrices A,B,C,D).

Determinantes 3x3

a) Calcular los Determinantes de las siguientes matrices 3x3,

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&0&1\\-1&-1&0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&3&6\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&4\\2&1&0\end{pmatrix}$$

b) Crear dos Cuadrados Latinos de tamaño 3x3 y calcular su determinante. *(Ver ejemplo de Cuadrado Latino en el Capítulo 2, Producto de Matrices)*

Determinantes de orden superior

Calcular el determinante de las siguientes matrices,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \\ -1 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & -1 & -3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -6 & 8 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ -5 & 0 & -5 & -6 & 0 \\ 0 & -8 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

Discutir el Determinante según parámetro

Dada las siguientes matrices, determinar el valor del parámetro λ para que el determinante sea distinto de cero.

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & -\lambda & 3 \\ 0 & (\lambda+1) & 1 \\ \lambda & -8 & (\lambda-1) \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} \lambda & \lambda & 0 \\ \lambda^2 & 4 & \lambda^2 \\ 0 & \lambda & \lambda \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} (\lambda-4) & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 2 \\ 3 & 3 & \lambda \end{pmatrix}$$

5 Determinantes y Sistemas de Ecuaciones

En esta sección trabajaremos la Regla de Cramer para poder resolver Sistemas de Ecuaciones Lineales.

Antes de comenzar con nuevos problemas, repasar y resolver con Cramer, los sistemas b),c),d) de la sección 3).

Resolver, utilizando Regla de Cramer, los siguientes sistemas,

$$a)\begin{cases} 7x - 8y = 3 \\ 9x + 9y = -8 \end{cases} \qquad b)\begin{cases} 2x + y + z = 6 \\ 3x - 2y - 3z = 5 \\ 8x + 2y + 5z = 11 \end{cases}$$

$$c)\begin{cases} -5x + 8y + 10z = -8 \\ x - 7y = -2 \\ 10x + 10y + 6z = 9 \end{cases} \qquad d)\begin{cases} 2x + 5y - z = -1 \\ 4x + y + 3z = 3 \\ -2x + 2y = 0 \end{cases}$$

6 Números Complejos

Aritmética Compleja

Comenzamos con algunas operaciones básicas con los números complejos.
Cabe recordar aquí la unidad imaginaria $i = \sqrt{-1}$
Se expresa un número complejo $z = a + ib$, en donde a, b son reales e i es la unidad imaginaria.

Sean los números complejos $z = 3 + 4i$, $w = 1 - 2i$, $t = 6i$, $q = -2 + 5i$ realizar las siguientes operaciones,

- $z + w$
- $2z - w$
- wt
- $zq + t$

En el *Plano Complejo*, dibuje los vectores correspondiente a los números complejos dados y el resultado de la operación.

Conjugado y división de numeros complejos

Recordar que dado un número complejo $z = a + ib$, su conjugado se expresa como $\overline{z} = a - ib$. Realizar las siguientes operaciones,

- $\dfrac{z}{w}$
- $\dfrac{1}{q}$

Ecuaciones cuadráticas y cúbicas, en los Complejos

Resolver las siguientes ecuaciones,

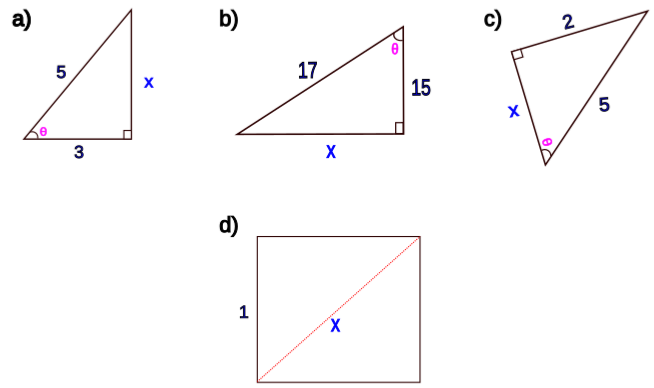
- $x^2 + 4 = 0$
- $x^2 - 2x + 5 = 0$
- $2x^2 - 4x + 10 = 0$
- $x^3 - x^2 + x - 1 = 0$
- $x^3 - 3x^2 + 7x - 5 = 0$
- $2x^3 - 7x^2 + 10x - 4 = 0$

7 Funciones Trigonométricas

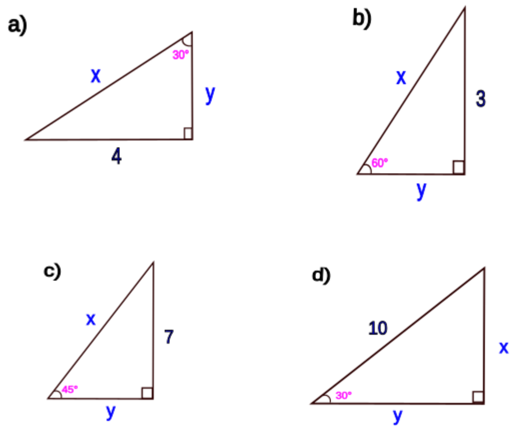
Repaso de algunos conceptos básicos en Trigonometría

Comencemos con las relaciones en el Triángulo Rectángulo, Teorema de Pitágoras y las Identidades de Seno, Coseno, Tangente del ángulo.

a) Determinar el valor de la longitud x, en el caso dado



b) En cada caso, determinar las cantidades x,y,



Demostración de identidades básicas

- $sin^2(\theta) + cos^2(\theta) = 1$
- $tan(\theta) = \dfrac{sin(\theta)}{cos(\theta)}$

Funciones Trigonométricas

En cada caso, determinar los valores de las funciones trigonometricas *(seno,coseno,tangente,cosecante,secante,cotangente)*

- Determinar los valores de las funciones si el punto $P(-15, 8)$ se encuentra en el lado terminal del ángulo θ.
- El ángulo esta en posición estandar, y su lado terminal sobre la recta $y = 3x$ en el segundo cuadrante.
- Si $\theta = \dfrac{3\pi}{2}$, determinar el valor de las funciones.
- El ángulo en posicion estandar y su lado terminal sobre la recta $3y + 5x = 0$, en el cuarto cuadrante.

Definición de las funciones para recordar.

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r} \qquad \cos\theta = \frac{x}{r} \qquad \tan\theta = \frac{y}{x} \quad (\text{si } x \neq 0)$$

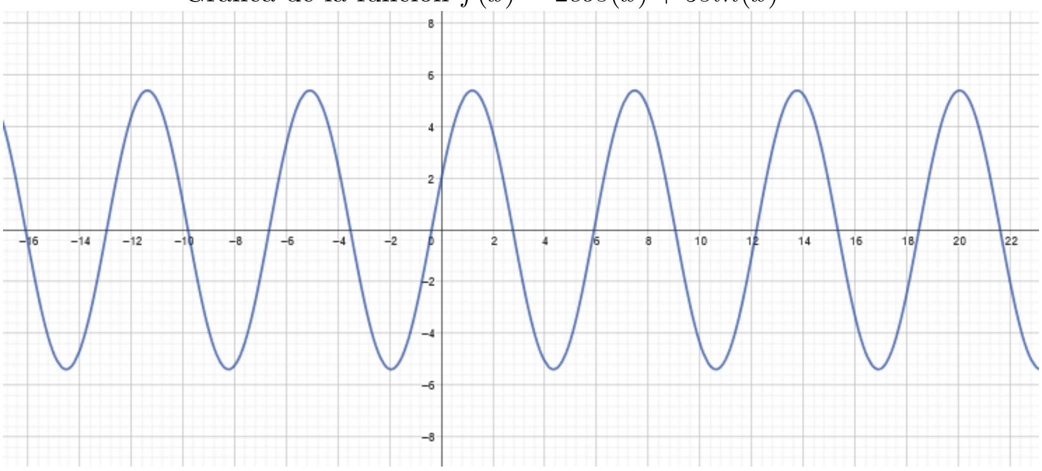
$$\csc\theta = \frac{r}{y} \quad (\text{si } y \neq 0) \qquad \sec\theta = \frac{r}{x} \quad (\text{si } x \neq 0) \qquad \cot\theta = \frac{x}{y} \quad (\text{si } y \neq 0).$$

Gráfica de las funciones trigonométricas

Investigar algunas gráficas de las funciones dadas a continuación. Conviene apoyarse en alguna herramienta computacional, como Geogebra, Octave, etc...

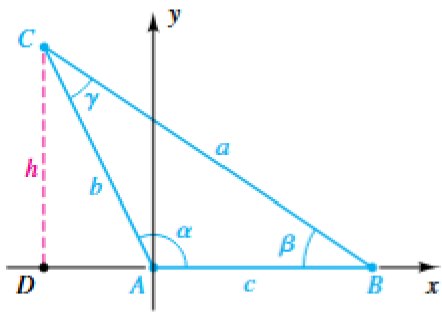
- $f(x) = 5sin(x)$
- $g(x) = 2cos(x)$
- $h(x) = 5tan(\frac{x}{2})$

Gráfica de la función $f(x) = 2cos(x) + 5sin(x)$



Teorema de los Senos

Resolver, según los datos datos, el problema aplicando la Ley de los Senos.



- $\alpha = 52, \quad \gamma = 65, \quad a = 23.7$
- $\beta = 25, \quad \gamma = 41, \quad b = 170$
- $\alpha = 27, \quad c = 75, \quad a = 34$
- $\gamma = 81, \quad c = 11, \quad b = 12$

Teorema del Coseno

Resolver, según los datos dados, el problema aplicando la Ley de los Cosenos.

- $\alpha = 60, \quad b = 20, \quad c = 30$
- $\gamma = 45, \quad b = 10, \quad a = 15$
- $a = 22, \quad b = 11, \quad c = 22$
- $a = 2, \quad b = 3, \quad c = 4$

Problema: En un triángulo ΔABC en donde $a = 5$, $c = 3$ Indicar cúantos posibles triángulos hay si se tiene que,

- $\gamma = 35$
- $\gamma = 39$
- $\gamma = 158$

Algunas propiedades trigonométricas

La idea en esta parte es probar algunas propiedades trigonométricas. Estas mismas pueden ser utiles a la hora de resolver problemas en otros ambitos, como por ejemplo en Mecánica, Electromagnetismo, etc...

- $cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = sin(\theta)$
- $sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = cos(\theta)$
- $sin(a + b) = sin(a)cos(b) + cos(a)sin(b)$
- $cos(a + b) = cos(a)cos(b) - sin(a)sin(b)$
- $sin(2\theta) = 2sin(\theta)cos(\theta)$

Cabe aclarar que existen más propiedades, identidades, de las que aquí se presentan. Estas fueron presentadas por mera elección y gusto.

Algunas ecuaciones trigonométricas

Aqui se se presentan algunas Ecuaciones Trigonometricas a resolver, la idea es hallar el conjunto solución, en los reales, que determina la ecuación.

- $sin(x) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
- $cos(x) = -1$
- $sin(x)tan(x) = sin(x)$
- $2sin^2(x) - cos(x) - 1 = 0$

8 Números complejos y Trigonometría

Recordemos que si $z = a + ib$, un número complejo, podemos expresarlo también en su forma polar o trigonométrica, $z = r(cos(\theta) + isin(\theta))$
en donde $r = |z|$ (módulo del número complejo z)

Expresar en forma polar, los siguientes números complejos.

- $z = -4 + i4$
- $z = 2\sqrt{3} + i2$
- $z = 2 + i7$
- $z = -2 + i7$

Producto y división en forma polar

Dado los números complejos $z = 2\sqrt{3} - i2$, $w = -1 + i\sqrt{3}$ Usar la forma polar para hallar el producto zw y la división $\frac{z}{w}$