

Lista de Ejercicios - 1ero EMS

Anthony de los Santos *

2025

*Los ejercicios y comentarios presentados aquí son de mi responsabilidad, por cualquier error visto contactar *agregdelossantos@gmail.com*

Contenido :

0	Sobre estas notas.	3
1	Geometría : Lugar Geométrico	3
2	Funciones de Primer grado	7
3	Funciones cuadráticas.	13
4	Sistema de ecuaciones e Inecuaciones.	15
5	Posiciones relativas entre recta - parábola	18
6	Inecuaciones de 2do grado	18
7	Función exponencial	19
8	Logaritmos	19

0 Sobre estas notas.

Estas notas estan pensadas para ser una guia en las clases, y también será referencia de ejercicios a realizar.

Estas notas, apuntes, estan en construcción. Se modifica en el correr del curso. **Ultima modificación : Jueves 19 de Junio**

1 Geometría : Lugar Geométrico

En esta sección de Geometría veremos algunos conceptos de Lugar Geométrico, como mediatrix, bisectriz, sus construcciones y también intersección entre Lugares Geométricos.

Ejercicio 1

- Defina Lugar Geométrico (LG).
- Exprese la Circunferencia como LG.

Ejercicio 2 - Primeras construcciones

Mediatrix

En este ejercicios trabajaremos con el concepto de Mediatrix y bisectriz.

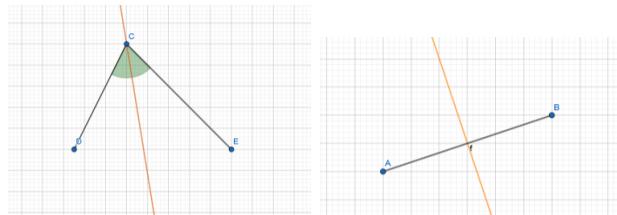
Comencemos con algo simple, dado un segmento de recta AB , de longitud 5cm construir su mediatrix.

Ahora, dados tres puntos no colineales A , B y C , encuentra el Lugar Geométrico que consiste en un único punto que equidista de A , B y C .

Ejercicio a) Construir un triángulo equilátero de lados 6cm y construir la mediatrix en cada uno de sus lados.

Al construir la mediatrix de cada lado de un triángulo, veremos que se intersectan en un punto, a este punto le diremos *circuncentro del triángulo*. Sabemos de Euclídes, que dado un punto (centro) y una distancia (radio) podemos trazar una circunferencia (*circunferencia circunscrita*). Pongamos como centro el punto circuncentro del triángulo y como radio la distancia de este punto a uno de sus vértices.

Ejercicio b) Trace un triángulo escaleno, halle el circuncentro de tal triángulo y trace la circunferencia.



1) Izquierda: Bisectriz del ángulo en el vértice C. 2) Derecha: Mediatrix del segmento AB.

Bisectriz

Ejercicio c) Construcción de un triángulo isósceles con dos lados de 6cm y determinar la bisectriz de cada uno de sus ángulos.

Al realizar esta construcción, las rectas se intersectan en un punto, el *incentro* del triángulo. Si dejamos como centro de una circunferencia este punto (incentro) y como radio la distancia de tal punto hacia un lado del triángulo, Que podemos decir de esta circunferencia *(circunferencia inscrita)* ?

Ejercicio d) Construir un triángulo equilátero de lados 7cm. Hallar los puntos circuncentro e incentro de tal triángulo con las respectivas circunferencias. *Trazar cada circunferencias con distinto color, si es posible*

Mediana

En un triángulo se denomina **Mediana** al segmento que une un vértice con el punto medio del lado opuesto a dicho vértice. Las medianas se intersectan en un punto llamado **Baricentro** o centro de gravedad.

Ejercicio e) Encontrar el baricentro de un triángulo equilátero y también de un triángulo isósceles.

Algunos problemas de intersección de Lugares Geométricos

- Dados tres puntos A, B y C, encuentre los puntos que equidistan de A y B, y que están a una distancia r del punto C. Según tu construcción, ¿ Que puedes decir de la intersección ?.

- Dadas dos rectas *secantes* r y s , y un punto P , encuentre los puntos que equidistan de r y s , y que están a una distancia d del punto P .
- Dada una circunferencia de centro O y radio R , y dos puntos A y B exteriores a la circunferencia, encuentre los puntos que están a una distancia d de la circunferencia y que también equidistan de los puntos A y B .

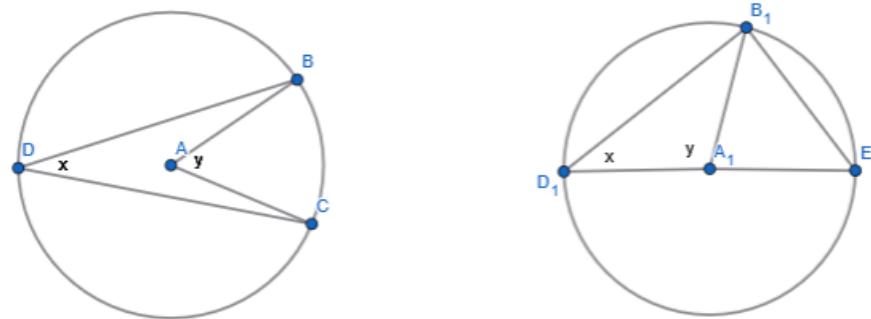
Demostración de algunos Teoremas

La idea de esta sección es Demostrar algunos teoremas básicos de la Geometría Plana (Euclidea).

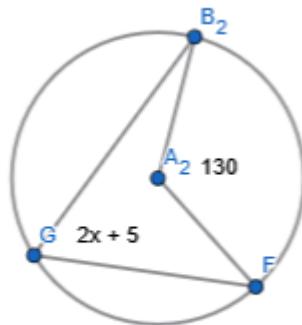
1. La suma de las medidas de los ángulos de un triángulo es 180
2. Los ángulos de la base de un triángulo isosceles, son congruentes.
3. Si dos ángulos de un triángulo son congruentes, entonces los lados opuestos a estos ángulos son congruentes.
4. Dos triángulos rectángulos son congruentes si la hipotenusa y un cateto de uno es respectivamente congruente con la hipotenusa y el cateto del otro.

Ángulos y arcos en la circunferencia

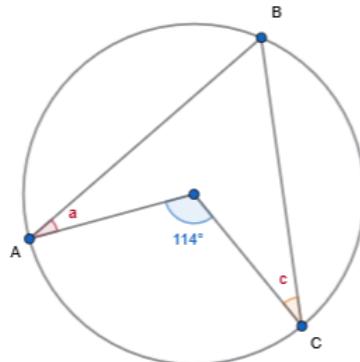
Dada las siguientes figuras, determinar el valor de las variables correspondientes, *los ángulos en la circunferencia*.



- En una circunferencia con centro O, el ángulo central AOB mide 70° . ¿Cuánto mide el ángulo inscrito ACB que corresponde al mismo arco AB?
- Los puntos A, B y C están sobre una circunferencia. Si el arco AB mide 110° , ¿cuánto mide el ángulo inscrito ACB que corresponde a este arco?
- Determinar el valor de la variable x



- En la siguiente figura, A,B,C son puntos en una circunferencia. a , c son medidas de ángulos en los vértices A y C respectivamente. Determinar el valor de la suma $a + c$



2 Funciones de Primer grado

En esta lista de ejercicios trataremos el tema de Función de primer grado y sus aplicaciones y ejemplos de funciones proporcionales.

Ejercicio 1 - Imágenes y tabla de valores.

Ejercicio 1.1)

Se consideran las siguientes funciones,

$$a) f(x) = 2x + 3 \quad b) g(x) = 2(x - 1) \quad c) p(x) = \frac{-3x}{4} - 2$$

Determinar para cada función la imagen de $x = 2, x = -3, x = 0, x = 3$.
Construir una tabla de valores, agregando valores a su elección y realizar la gráfica de las funciones.

Cálculo de imágenes y gráfica.

- Una pequeña empresa artesanal tiene costos fijos mensuales de \$12500 (alquiler, servicios, etc.). El costo de producir cada unidad de su producto es de \$250. Esto es, $c(x) = 12500 + 250x$ es la función de Costo Total.
 - Calcular el costo total si la empresa produce 100 unidades.
 - Calcular el costo total si la empresa produce 250 unidades.
- Una empresa de consultoría cobra \$600 por cada hora de servicio que presta. Calcula el ingreso total si la empresa presta {40, 60, y 80 } horas de servicio en un mes.
- Una máquina industrial se compró por \$22000 (dólares). Se estima que su valor se deprecia linealmente (pierde su valor de forma lineal) a una tasa de \$850 por año. Calcular el valor de la máquina después de 3, y 8 años
- Tratar de realizar un bosquejo de las gráficas de las funciones anteriores. Utilizar, en caso de ser posible, alguna herramienta para visualizar las gráficas, como por ejemplo Geogebra.

Ejercicio 1.3) Proporcionalidad : Regla de tres

- Definiciones: ¿Qué significa que una cantidad X sea *directamente proporcional* a una cantidad Y ? ¿ Que significa que Y sea *inversamente proporcional* a X ?

- Si 5 empleados pueden procesar 120 facturas en un día, ¿Cuántas facturas podrán procesar 8 empleados en el mismo día, manteniendo la misma eficiencia?
- Para un cierto evento, se necesita comprar 24 metros de una tela para decoración. Se sabe que el costo por comprar 15 metros de tela es de \$200. ¿Cuanto sería el costo por los 24 metros de tela ?
- En un día de trabajo de 8 horas, un operario ha confeccionado 140 cajas para guardar en cada una ciertos dulces. ¿Cuantas horas tardaría para realizar 240 cajas ?
- En una tienda el paquete de 800g de azúcar se vendía a \$5, actualmente se venden paquetes de 2kg a \$14. ¿Aumentó el precio del azucar ? Si es así, ¿Cuál sería la diferencia de precios ?

Regla de tres compuesta

- En una empresa, 10 funcionarios producen 150 piezas en 30 días habiles. ¿Cuantos funcionarios se necesitan si la cantidad de piezas a realizar es 200 y cuentan con 20 días habiles ?
- Se gastaron \$68 en el alumbrado de una casa, con 10 lamparas encendidas durante 4 horas. ¿Cúanto se gastará con 15 lamparas encendidas durante 3 horas ?
- 3 operarios trabajando 8 horas al día pueden producir 240 unidades de un producto en 5 días. ¿Cuantas unidades podrán producir 5 operarios trabajando 6 horas al día durante 10 días?
- Un almacén con 4 estanterías puede almacenar 200 cajas de un producto, con cada caja conteniendo 12 unidades. Si el almacén añade 2 estanterías más y decide que cada caja contenga 15 unidades, ¿cuántas unidades del producto podrá almacenar en total?
- **Problema de las canillas y el estanque :**
Un estanque se llena con 2 canillas que vierten agua a tasas constantes de 15 litros/minuto y 20 litros/minuto respectivamente. Si ambas canillas tardan 4 horas en llenar el estanque hasta el 75% de su capacidad, ¿cuanto tiempo tardará en llenarse el 25% restante del estanque si se cierra la canilla 1 (la más lenta) y se abre simultáneamente una fuga en la base que desagua a una tasa constante de 5 litros/minuto ?

Ejercicio 2 - Cortes con los ejes

Para representar graficamente una función vimos que disponemos de un sistema de coordenadas cartesiano, que posee dos ejes (rectas) perpendiculares. En donde su intersección es el origen de coordenadas.

La gráfica de una función, su *curva*, puede "cruzar" alguno de esos ejes. La intersección o el cruce con el eje vertical, se denomina **Ordenada al Origen**, y este sería determinado por la imágen de $x = 0$, esto es, $f(0)$.

Ahora, puede ser que la curva, cruce por el eje horizontal, también denominado eje de las *abscisas*. El Conjunto de aquellos puntos sobre este eje en donde la curva interseca, se denomina **Cero de la función** o también el conjunto de **raíces de la función** $f(x)$.

Estos puntos se obtienen resolviendo la ecuación $f(x) = 0$

Lo anterior se puede expresar en un lenguage de conjuntos como,
 $C = \{x \in A \mid f(x) = 0\}$ Donde C es el conjunto de Ceros, para una función $f : A \rightarrow B$

Ejercicio 2.1)

Dada las siguientes funciones, hallar los puntos de corte con los ejes. Esto es, determinar la ordenada al origen, (*Corte con el eje vertical Y*), esto se dará cuando $x = 0$. Corte con el eje de las abscisas, (*corte con el eje horizontal X*), esto se dará cuando $f(x) = 0$. Realizar gráfica.

a) $f(x) = 2x + 4$ b) $g(x) = -3(x - 5)$ c) $h(x) = \frac{x}{7} - 7$ d) $y(x) = \frac{2x}{3} + \frac{3}{2}$

Ejercicio Opcional: Programación

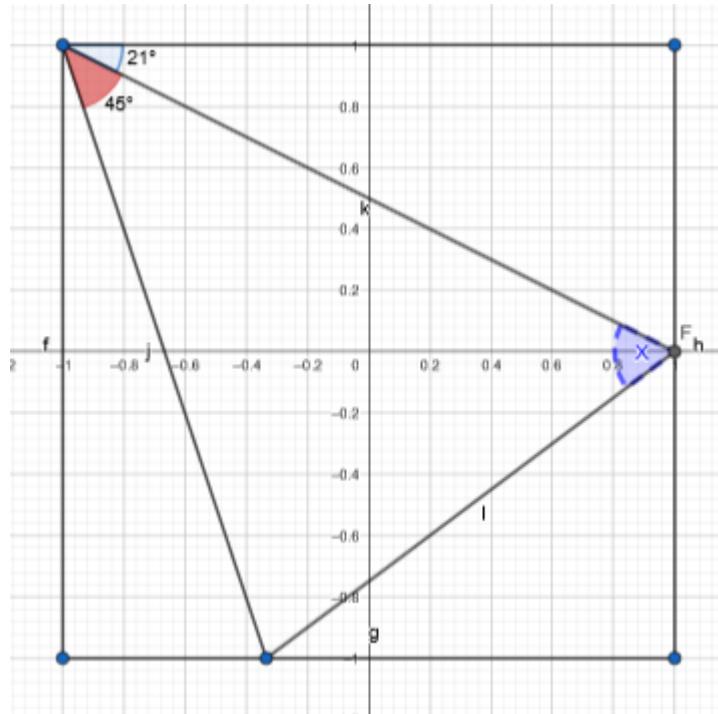
Escribir un programa (En el lenguage que deseen, Java, Python,c++,...) que determine los cortes con los ejes. Un ejemplo es definir una función **cortesPrimerGrado(a,b)**, que toma como entrada dos valores (a,b) de tipo **Float**, y retorna la salida en pantalla los cortes con los ejes (X,Y).

Verificar aplicando el programa con las funciones del Ejercicio 2.1)

Ejercicio 3

Ejercicio 3.1) Una poco de Geometría

a) Dada la siguiente figura, determinar el valor de x .



b) Indicar los cortes con los ejes de la función, $p(x) = 2x + \frac{\pi}{4}$.

c) Resolver $p(x) = \pi$

Ejercicio 3.2)

Dada las siguientes funciones, $f(x) = 5x - 3$, $g(x) = -\frac{1}{5}x + 3$

a) Graficar en un mismo sistema de coordenadas cartesiano, ambas funciones. Esto es, una gráfica ambas funciones.
Se intersectan estas funciones ?

b) Hallar, *si es que se intersectan*, las coordenadas del punto de intersección.

Ganancias en la Gomería

En un taller de mecánica automotriz para el sector de Gomería deciden incorporar la venta de neumáticos. Para comenzar con esta propuesta, deciden vender cubiertas rodado 13, R13, de distintas marcas.

La administración obtiene un modelo matemático para estimar la ganancia de ventas, este modelo se expresa como,

$$G(x) = 40x - 12$$

En donde 12 es un valor fijo en Dolares, y por cada neumático vendido, un valor de 40 dolares.

- a) Convertir cada valor que esta en Dolares a Pesos Uruguayos.
- b) Calcular la ganancia $G(x)$ si se venden, 5, 8, 10, 13 neumáticos.
- c) Determinar cuantos neumáticos se necesitan para que la gancia sea de, \\$ 3600, \\$ 6880, \\$ 11680

Función Inversa

- a) Determinar las condiciones para la existencia de una función inversa de $f : A \rightarrow B$
- b) Dada las siguientes funciones, hallar la inversa de cada una y realizar una tabla de valores.
 - i) $f(x) = 3x - 2$
 - ii) $g(x) = 7x + 7$
 - iii) $h(x) = \frac{-x}{2} - 3$
 - iv) $y(x) = \frac{x}{10} + 10$
- c) Graficar 2 funciones de la parte b) con su respectiva inversa.

d) Escala de Temperatura

Las escalas de temperatura Fahrenheit (F) y Celsius (C) está dada por

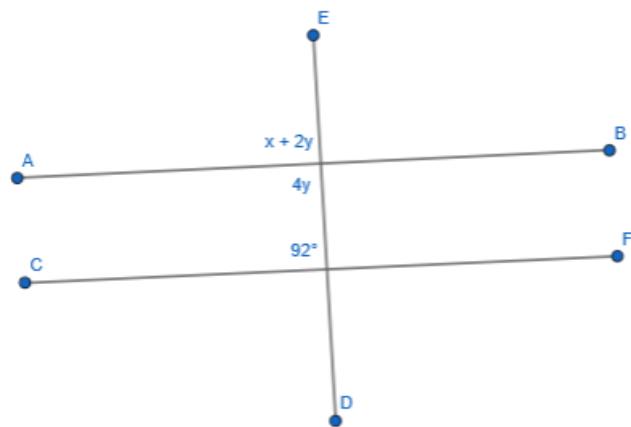
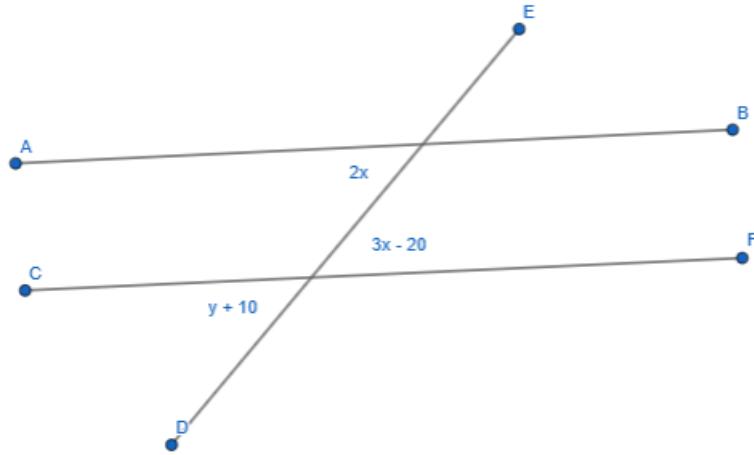
$$F(C) = \frac{9}{5}C + 32$$

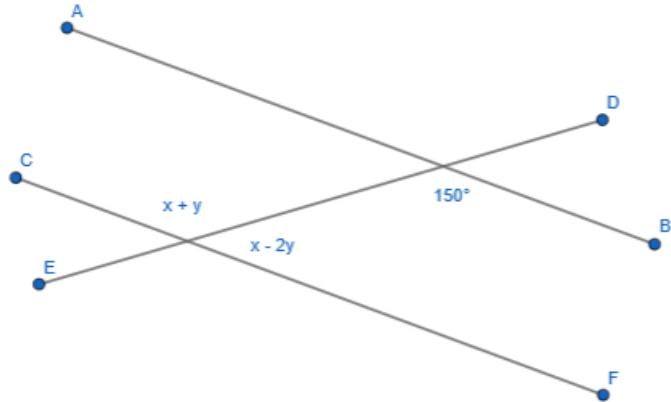
Donde C es un dato de entrada, una temperatura en Celsius, y $F(C)$ es la correspondiente temperatura en Fahrenheit.

- i) Encontrar F^{-1} y discutir el significado.
- ii) Hallar $F^{-1}(86)$

Rectas paralelas

Utilizando los *principios de rectas paralelas*, determinar los valores de las medidas de x , y en cada caso.





3 Funciones cuadráticas.

Una función cuadrática o *función de segundo grado* es una función polinomial de la siguiente forma: $f(x) = ax^2 + bx + c$

Primeros ejercicios: Completar la tabla de valores, con los valores de entrada indicados, y graficar las siguientes funciones:

- $f(x) = x^2 - 2$, $x = \{-2, -0.5, 0, 1, 3\}$
- $g(x) = x^2 - x$, $x = \{-4, -2.5, -1, 1, 2.25\}$
- $h(x) = x^2 + 2x - 3$, $x = \{-2, -1.5, -1, -0.5, 0\}$

Podría ser necesario agregar más valores de entrada en la tabla de valores para graficar las funciones.

Un poco de álgebra

Dada las siguientes expresiones algebraicas, desarrollar o factorizar

a) $(x - 4)(x + 4) =$

b) $x^2 + 2x =$

c) $x^2 - 25 =$

d) $2x^2 - 4x =$

El Cero de la función

Recordemos que el Cero de una función es el conjunto de soluciones a la ecuación $f(x) = 0$, esto es, el conjunto de raíces de la función (cortes con el eje horizontal, X).

Parte A)

Determinar los ceros (raíces) de las siguientes funciones y realizar un bosquejo de su gráfica. (*Puede y conviene utilizar alguna herramienta computacional para las gráficas, ej: Geogebra.*)

a) $f(x) = x^2 - 16$

b) $g(x) = x^2 + 2x$

c) $h(x) = 2x^2 - 4x$

d) $y(x) = x^2 + 25$

Parte B)

Parte B) El caso general : $f(x) = ax^2 + bx + c$

Determinar los ceros para las siguientes funciones y graficar.

a) $f(x) = x^2 + 2x - 8$

b) $g(x) = -x^2 - 6x - 8$

c) $h(x) = 2x^2 + 2x - 12$

d) $y(x) = x^2 - \frac{3}{2}x - 1$

Ejercicio Opcional: Programación

Escribir un programa (En el lenguaje que deseen, Java, Python,c++,...) que determine los cortes con los ejes de una función cuadrática. Un ejemplo es definir una función [cortesSegundoGrado\(a,b,c\)](#), que toma como entrada los coeficientes (a,b,c) de tipo Float, y retorna la salida en pantalla los cortes con los ejes (X,Y).

Verificar aplicando el programa con las funciones anteriores.

Máximo, mínimo. Coordenadas del vértice

Determinar las coordenadas del vértice de las funciones anteriores (*Ejercicio 3.1 Parte B*). Indicar si se trata de un máximo o un mínimo.

Ingresos en la tienda

En una determinada tienda, se sugiere que el ingreso generado por vender cierta mercadería está dado por la función $I(x) = 80x - 0.5x^2$ En donde la unidad de $I(x)$ es el dólar.

¿Cuál es el ingreso máximo, y cuántas unidades deben fabricarse para obtener este máximo?

Beneficio en una empresa

El beneficio $B(x)$ (en miles de dólares) de una empresa al producir y vender x unidades de un producto está dado por la función $B(x) = -0.1x^2 + 2x - 5$.

- ¿Cuántas unidades debe producir y vender la empresa para maximizar su beneficio?
- ¿Cuál es el beneficio máximo que puede obtener la empresa?

Ejercicio Opcional: Programación

Escribir un programa (En el lenguaje que deseen, Java, Python, C++, ...) que determine las coordenadas del vértice de una función cuadrática y exprese si se trata de un máximo o un mínimo.

Verificar aplicando el programa con las funciones anteriores.

4 Sistema de ecuaciones e Inecuaciones.

Sistema de ecuaciones lineales 2 x 2

Primeros ejercicios

- Hallar dos números cuya suma es 2024 y cuya diferencia es 2012.
- La suma de dos números es el doble de su diferencia. El número más grande es 6 más el doble del más pequeño. Determinar tales números.

Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones y realizar su gráfica

$$\begin{array}{llll}
\begin{cases} x + y = 4 \\ -x + y = 0 \end{cases} &
\begin{cases} 2x - 3y = 9 \\ 4x + 3y = 9 \end{cases} &
\begin{cases} x + 2y = 7 \\ 5x - y = 2 \end{cases} &
\begin{cases} 2x - \frac{y}{3} = 4 \\ \frac{x}{3} + 2y = 0 \end{cases} \\
\begin{cases} 2x + 4y + 6z = 18 \\ 4x + 5y + 6z = 24 \\ 3x + y - 2z = 4 \end{cases} &
\begin{cases} 2x + 4y + 6z = 18 \\ 4x + 5y + 6z = 24 \\ 2x + 7y + 12z = 30 \end{cases} &
\begin{cases} 2y + 3z = 4 \\ 2x - 6y + 7z = 15 \\ x - 2y + 5z = 10 \end{cases}
\end{array}$$

Inecuaciones (o también Desigualdades)

Resolver las siguientes inecuaciones (desigualdades lineales), y expresar el conjunto solución,

$$\begin{array}{lll}
\text{a)} \ 2x - 5 \geq 3 & \text{b)} \ 3x + 7 \leq 2 & \text{c)} \ x - 5 < 3 \\
\text{d)} \ -2x + 5 \geq 4 & \text{e)} \ \frac{-x}{2} + 10 > 5 & \text{f)} \ -7x - \frac{1}{3} \geq 7
\end{array}$$

Una aproximación al valor absoluto... Resolver las siguientes expresiones.

- $|2x| \geq 7$
- $|x - 5| < 3$
- $|5x - 2| \geq 3$

Ejercicio Opcional: Visualizar las desigualdades

Graficar (bosquejar) alguna de las desigualdades realizadas anteriormente. Para eso tambien puede utilizar alguna herramienta computacional, como Geogebra.

Algunas situaciones...

La idea de esta sección es aplicar los conceptos de sistemas lineales y de inecuaciones en algunas situaciones planteadas.

Situación 01) Finanzas del taller

En un taller de mecánica automotriz, Sofia, su dueña, tiene pensado un nuevo plan de servicio técnico para así atraer nuevos clientes y generar confianza con los clientes habituales.

Según su planteo, decide enfocarse en *diagnóstico y mantenimiento de vehículos*, con un costo de \$ 1500 para autos, \$ 1000 para motos.

Según Sofia, debería vender 35 servicios de diagnóstico y mantenimiento

en total, para sumar \$ 47500

- ¿ Cuanto sería la cantidad de autos y de motos que deberían ir al servicio de diagnóstico y mantenimiento para cumplir con lo estimado por Sofia ?

Situación 02) Juegos en plaza

Sofia, la dueña del taller de mecánica de la Situación 01, quiere comenzar un nuevo emprendimiento de Juegos para adolescentes en un local que tiene alquilado y con amplio espacio. Tendrán tanto juegos mecánicos como juegos de consola y PC. También tendrá un espacio de café y merienda. Según su análisis estaría entre dos Planes para sus finanzas,

Plan A: Costo de sociedad \$ 150 y costo por cada juego \$ 25.

Plan B: Costo de sociedad \$ 100 y costo por cada juego \$ 50

- Cuantos juegos debería venderse para que el Plan A genere mayor beneficio que el Plan B ? Tiene sentido optar por el Plan A ?

Situación 03) Costo del manejo de un cierto auto X

Un cierto modelo de auto, marca X, según un estudio de una consultora analítica su costo anual de manejo se aproxima a un modelo matemático lineal,

$$c(m) = 1200 + 0.35m$$

donde m representa la cantidad de kilómetros (km) recorridos al año y $c(m)$ tiene unidades en Pesos \$.

Supongamos que alguien compra este auto marca X, y decide presupuestar los costos del año relacionados al auto entre \$ 6400 y \$8000.

- Cual sería el intervalo de kilómetros (km) que alguien debería recorrer en este auto según el presupuesto planteado ?

5 Posiciones relativas entre recta - parábola

Resolver los siguientes sistemas, recta-parábola, y realizar la gráfica del sistema.

$$\begin{cases} y = x^2 - 4x + 3 \\ y = 2x - 6 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + 2x + 1 = y \\ 4x - y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -x^2 + 3x - 5 - y = 0 \\ x - 2 - y = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} y = 2x^2 + x - 1 \\ y = 5x - 3 \end{cases}$$

6 Inecuaciones de 2do grado

Resolver y expresar el conjunto solución de las siguientes inecuaciones de segundo grado

- $x^2 - 5x + 6 > 0$
- $x^2 + 2x - 8 \leq 0$
- $2x^2 + 7x + 3 \geq 0$
- $x^2 + 2x + 5 < 0$

De cierto modo, el resolver inecuaciones de segundo grado nos deja una idea del [estudio del signo de una función](#), en este caso, estudiemos el signo de las siguientes funciones de segundo grado.

- $f(x) = x^2 + 2x - 8$
- $g(x) = -x^2 - 6x - 8$
- $h(x) = 2x^2 + 2x - 12$

7 Función exponencial

Ejercicio 1) Resolver las siguientes ecuaciones exponenciales.

- $3^{x+1} = 81$
- $3^{2x} = 9$
- $4^x = 2^{x+1}$

Ejercicio 2)

Determinar el conjunto solución de la ecuación $2^{-x^2-2x+5} = 4$

Ejercicio 3) Resolver las siguientes ecuaciones,

- $(0, 25)^{2-x} = \frac{256}{2^{x+3}}$
- $(\frac{1}{27})^{4-x} = 9^{2x}$

8 Logaritmos

Ejercicio 1) Determinar el dominio de las siguientes funciones logarítmicas.

- $f(x) = \log(8 - 2x)$
- $g(x) = \log(\frac{1}{3} - 3x)$
- $y(x) = \log(2x^2 - 2x - 4)$

Ejercicio 2) Resolver las siguientes ecuaciones logarítmicas.

- $\log(x - 2) = \log(4) - \log(x + 2)$
- $\log(x^2 - 2x + 4) = \log(5) + \log(x)$
- $\log(\frac{x}{3} + 3) = \log(3) + \log(x)$

Ejercicio 3) Una muestra de 15g de yodo radiactivo se desintegra en forma tal que la masa restante después de t días esta dada por $m(t) = 15e^{-0.087t}$ donde $m(t)$ se mide en gramos.

- ¿ Despues de cuántos días quedan solo 5 gramos ?

Para tener en cuenta, el simbolo e que aparece en la expresión de la función $m(t)$ es el número e .